スパースモデリングの
イメージング技術への応用

2017年11月17日

池田思朗
（統計数理研究所）

はじめに

理論的進展

応用

発展

まとめ

略歴

教育歴

1996/3	東京大学大学院 工学系研究科 計数工学専攻 博士課程修了
1993/3	東京大学大学院 工学系研究科 計数工学専攻 修士課程修了
1991/3	東京大学 工学部 計数工学科 卒業
1987/3	埼玉県立 浦和高等学校 卒業

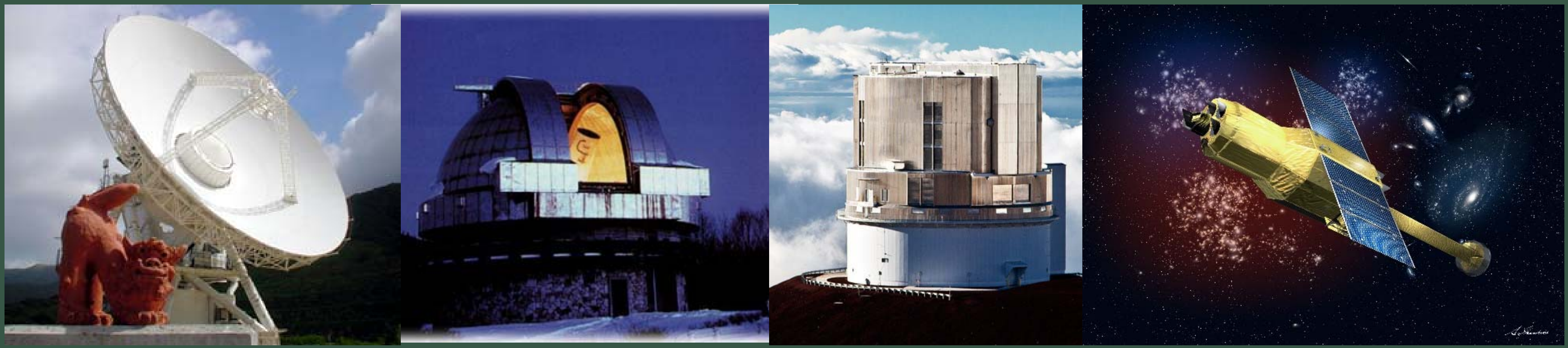
職歴

2016/4 - 現在	統計数理研究所 教授
2007/4 - 2016/3	統計数理研究所 准教授
2003/2 - 2007/3	統計数理研究所 助教授
2001/4 - 2003/1	九州工業大学 生命体工学研究科 助教授
1998/10 - 2001/3	JST さきがけ研究21 「情報と知」領域 研究員
1996/4 - 1998/9	理化学研究所 基礎科学特別研究員
1996/1 - 1996/3	日本学術振興会 特別研究員 PD

◎ これまでの研究分野

- ◎ 音声処理
- ◎ 脳計測データの解析
- ◎ 情報幾何学
- ◎ 情報理論
- ◎ 符号理論・通信理論
- ◎ 水産資源データの解析
- ◎ 天文データ解析

天文データの解析



- 計測の手法が発達し、データの量が爆発的に増えている。
- 波長や目的に応じて様々な問題が存在する。
- 得られる情報は限られていて、雑音も大きい。多くは逆問題。
- 統計学、機械学習の手法が役立つ問題が多く存在する。

はじめに

理論的進展

応用

発展

まとめ

はじめに

理論的進展

圧縮センシング

応用

発展

まとめ

スパースな表現

スパース性とは

ここでは多次元変数の多くが 0 であることを「スパース」と呼ぶ.

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_N)^T, \quad x_i \in \Re$$

(^{T} は行列の転置) 以下ではスパース性を用いて生まれる新たな情報処理の方法を扱う.

たとえば

- 録音された音を構成する周波数成分は少ない.
- 沢山ある遺伝子のうち，特定の病気に関係するものは少ない.
- 動画は画像の列だが，隣接する時刻の画像で変化する画素は少ない.

スパース表現に基づく情報処理の広がり

どのような情報処理
- 変数選択
- 情報圧縮
- クラスタリング
- ノイズ除去
- 画像認識
- 計測データ処理

関連する分野
- 統計学
- 機械学習
- 情報理論
- 最適化理論
- 信号処理，画像処理
- 計測技術

20 世紀の工学的な手法は誤差の 2 乗など 2 乗ノルムに基づいて発展した．これは変数の エネルギー ，あるいは パワー ，に基づく方法である．
一方，スパース性は 成分の数 ，に基づく方法である．現在，様々な方法がスパース性に基づく新たな方法で書き換えられている．

スパースな解の正しさ

以下で用いるノルムの定義

0 ノルム: $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_0} = |\{x; x_i \neq 0\}|$

1 ノルム: $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1} = \sum_i |x_i|$

2 ノルム: $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_2} = \left(\sum_i x_i^2\right)^{1/2}$

ノルムの定義

- $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
- $\|a\boldsymbol{x}\| = |a|\|\boldsymbol{x}\|$.
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

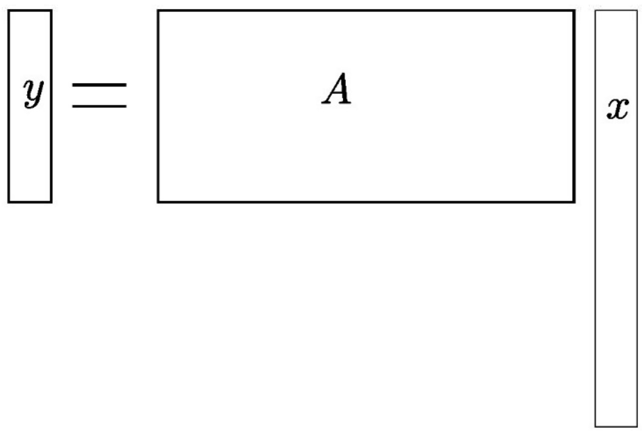
厳密には 0 ノルムはノルムの定義を満たさないが，便宜的にノルムと呼ぶことにする．

スパースな解の正しさ

次の問題を考える.

P_0: ℓ_0 最適化

$$\min \|\boldsymbol{x}\|_{\ell_0}, \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}.$$



P_0 が唯一の解を持つ条件を知りたい. これは $\boldsymbol{x}$ と A の組み合わせに対する特徴付けである.

ℓ_1 復元定理

$\boldsymbol{x}$ が S–sparse であるとする ($S \geq 1$). A は RIP を持ち $\delta_{2S} \leq \sqrt{2} - 1$ を満たすと仮定する．このとき

$$\min \left\| \boldsymbol{x} \right\|_{\ell_1}, \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$$
$$\min \left\| \boldsymbol{x} \right\|_{\ell_0}, \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}.$$

の解は一致する．

$\boldsymbol{x}$ が疎性を持ち，A が良い性質を持っていれば難しい ℓ_0 最適化を実現可能な ℓ_1 最適化で置き換えても同じ結果が得られる．

Single Pixel Camera

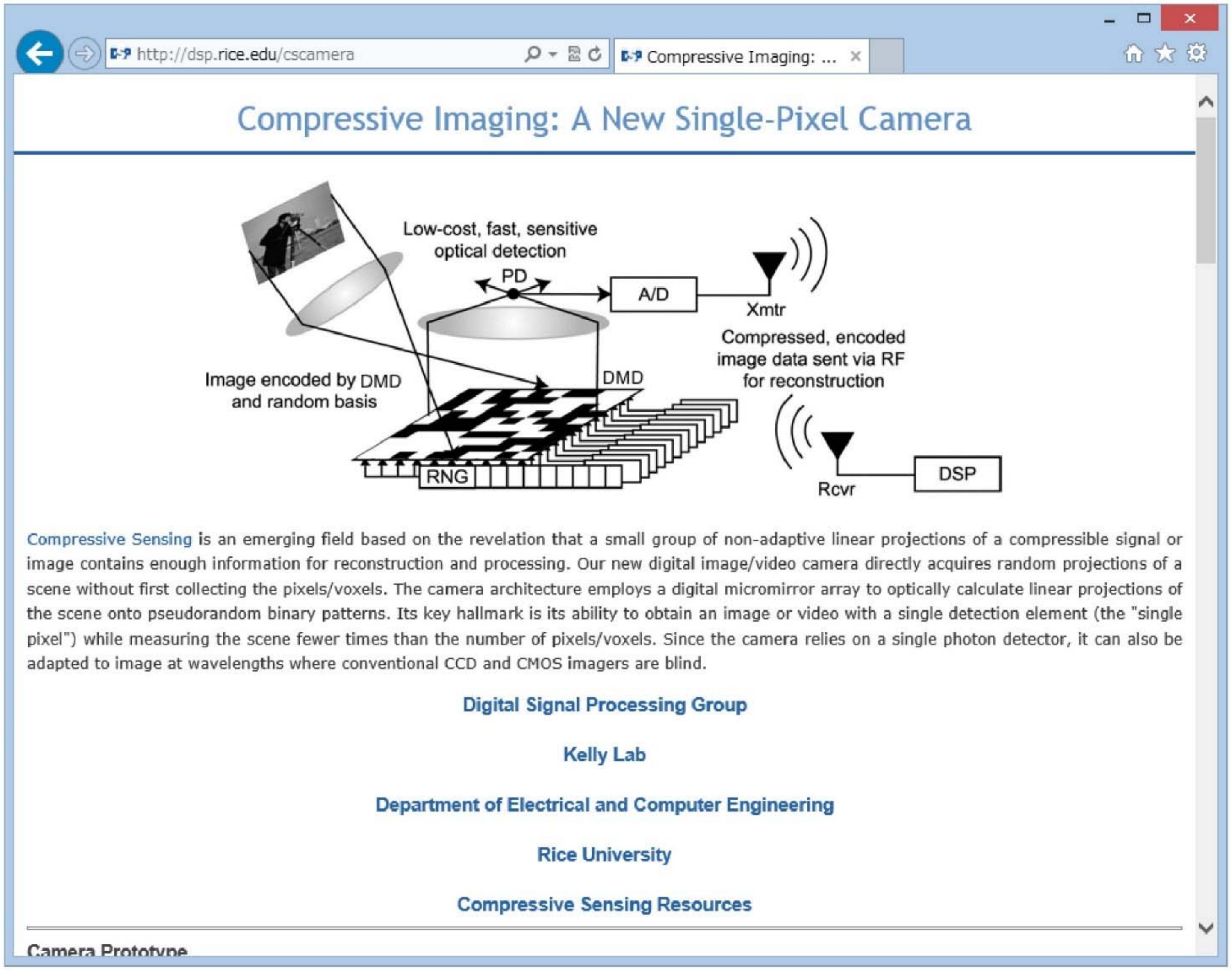
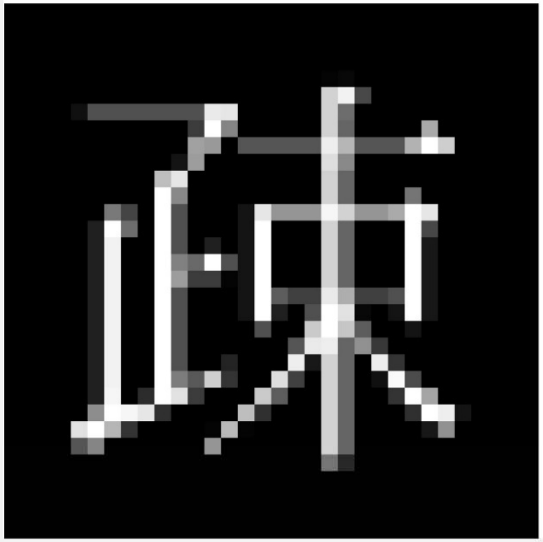


Figure: Rice 大学 (米国) の HP

Single Pixel Camera: 問題

最近のデジタルカメラの画素数はとても多くなっているが，このカメラの画素数は 1 である．撮像には工夫が必要である．1 ピクセルカメラでは，高速に制御されるマイクロミラーを用いて画像を反射してから集光する．

(a) マイクロミラーのパターンの例.



(b) 撮影する画像.

Single Pixel Camera: Compressed Sensing として

$\boldsymbol{x}$ が画像であり，我々はその対象を観測 (sensing) したい．
最終的には観測結果から対象を再構成したい．
$\boldsymbol{x}$ を "1 回" 観測するとは A の行ベクトル $\boldsymbol{a}_{(i)} = (a_{i1}, \cdots, a_{iN})$ を $\boldsymbol{x}$ に乗じる．すなわち，

$$y_i = \boldsymbol{a}_{(i)}\boldsymbol{x}$$

を得ることだとする．これらを複数観測したときに，$\boldsymbol{x}$ を復元したい．
全ての観測をまとめたものが $\boldsymbol{y}$ である．

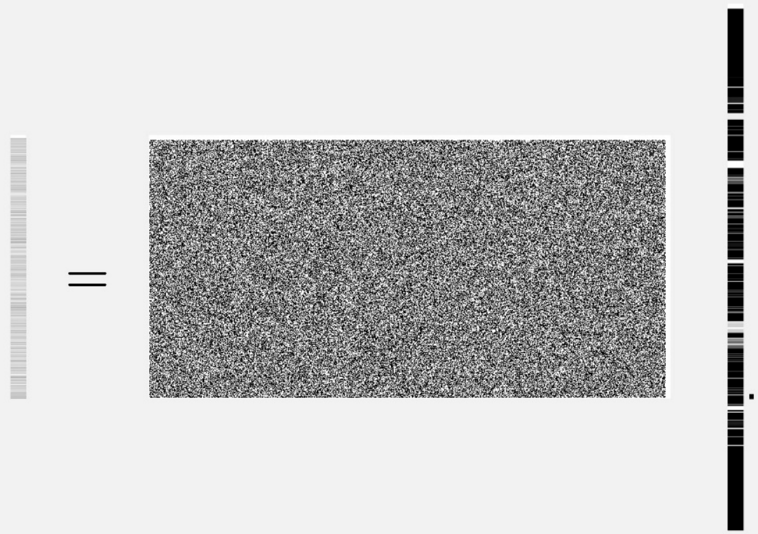
$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}.$$

Single Pixel Camera: 原理

何回も繰り返し撮影をすると,

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$$

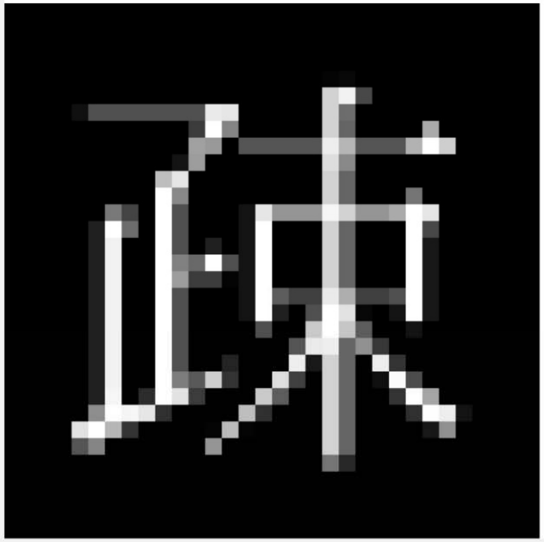
として線型の関係が得られる．A, $\boldsymbol{y}$ が既知のときに $\boldsymbol{x}$ を求めるためにはこの連立一次方程式を解けばよい．図示すれば,



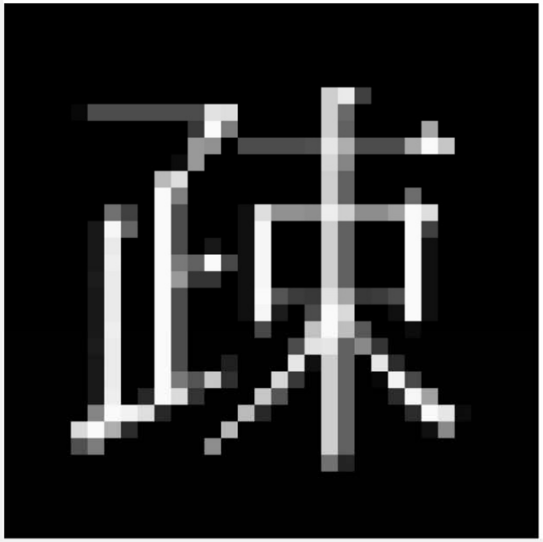
Single Pixel Camera: シミュレーションの例

原理

シミュレーションを行った．$n = 512$, $m = 1024$ であるからこの連立一次方程式の解は不定である．$\boldsymbol{x}$ は 1024 の成分のうち 234 の成分のみで値をもっているので，$\boldsymbol{x}$ がスパースであることを用いて解を求めると次の結果を得る．



(a) 撮影する画像.



(b) 復元した画像.

Single Pixel Camera

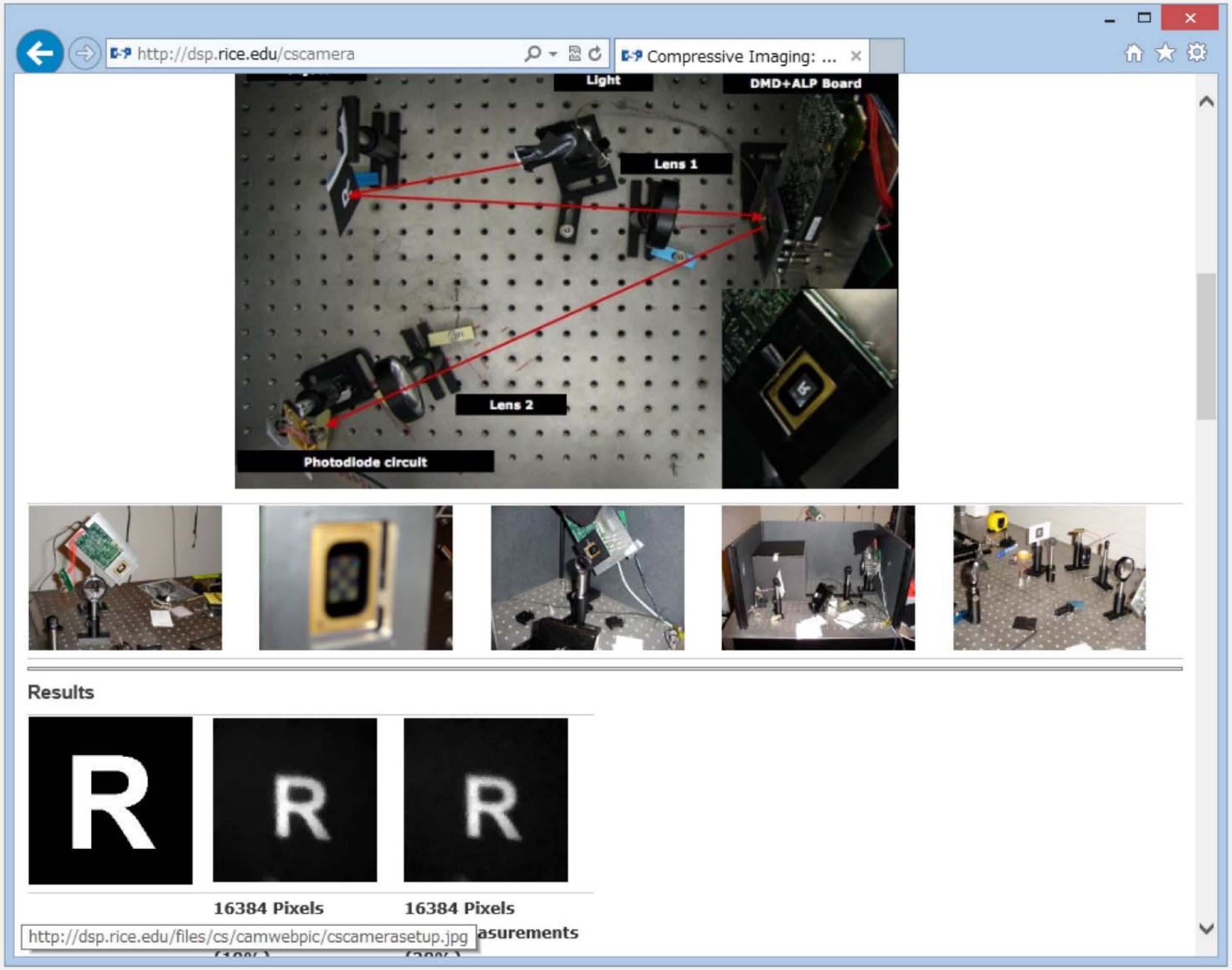


Figure: Rice 大学 (米国) の HP

はじめに

理論的進展

LASSO

応用

発展

まとめ

LASSO (least absolute shrinkage and selection operator)

観測ノイズ

圧縮センシングでは観測過程を次のように定義した.

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$$

しかし，現実の観測ではノイズが存在し，

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}$$

のようなモデル化のほうが適切であることが多い.

これは回帰分析のモデルであり，こうした問題でスパース性を用いたものは 1996 年に LASSO として提案された．ここでも $A \in \Re^{M \times N}$, $M < N$ の場合を考える.

LASSO

ノイズあり: $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}$

$$\min_{\boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}\|_{\ell_2}^2 \quad \text{subject to} \quad \|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1}^2 \leq L.$$

L によって $\boldsymbol{x}$ の非ゼロ成分の数は変化する．L を大きくすると最大で M 個，L を小さくすると最小で 1 個になる．

Lagrange 定数を用いた同値な問題

$$\min_{\boldsymbol{x}} \left[\frac{1}{2} \|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}\|_{\ell_2}^2 + \lambda \|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1} \right].$$

全ての $\lambda \geq 0$ に対して，同じ $\boldsymbol{x}$ によって最適値が達成される $L \geq 0$ が必ずひとつ存在する．

LASSO とスパース性

$M < N$ のとき，$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_N)$ の N 個の列ベクトルから任意の M 個をとってきたとき，どのようにとってきても，必ず 1 次独立となると仮定する．$\boldsymbol{x}$ の成分のうち 0 でない 成分の数は 0 個 ($\lambda \to \infty$ で) から M 個まで変化する．M は N よりも小さいから，解はスパースになる．

- Tibshirani (1996). "Regression shrinkage and selction via the Lasso," *J. R. Stat. Soc. B*, *58(1)*, 267-288.
- Obourne, Presnell, & Turlach (1999). "On the Lasso and its dual," *J. Comp. and Graph. Stat.*, *9*, 319-337.

はじめに

理論的進展

応用

発展

まとめ

スパース性

$\boldsymbol{x}$ がスパース性を持つ場合を考えたが，スパース性をもつデータを扱うという枠組に意味があるのか．

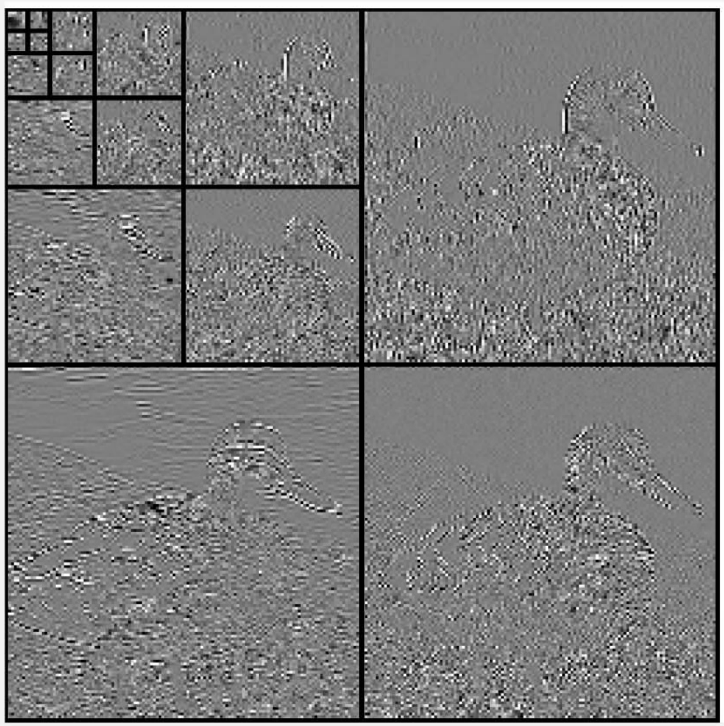
スパースな表現をもつデータはあるのか

- 情報理論では $\boldsymbol{x}$ を作れる場合がある．データ解析では状況が異なる．
- ビッグデータでは，観測できるデータは多いが意味を持つ情報は少ない次元によって表現できる，という仮定を置くことが多い．
- ゲノムデータなどでは，沢山ある遺伝子が観測されたとしても，特定の病気に関係する遺伝子は少ないと考えられている．
- 音や画像といったデータはスパース性を持つ．

画像

Wavelet 基底による画像変換

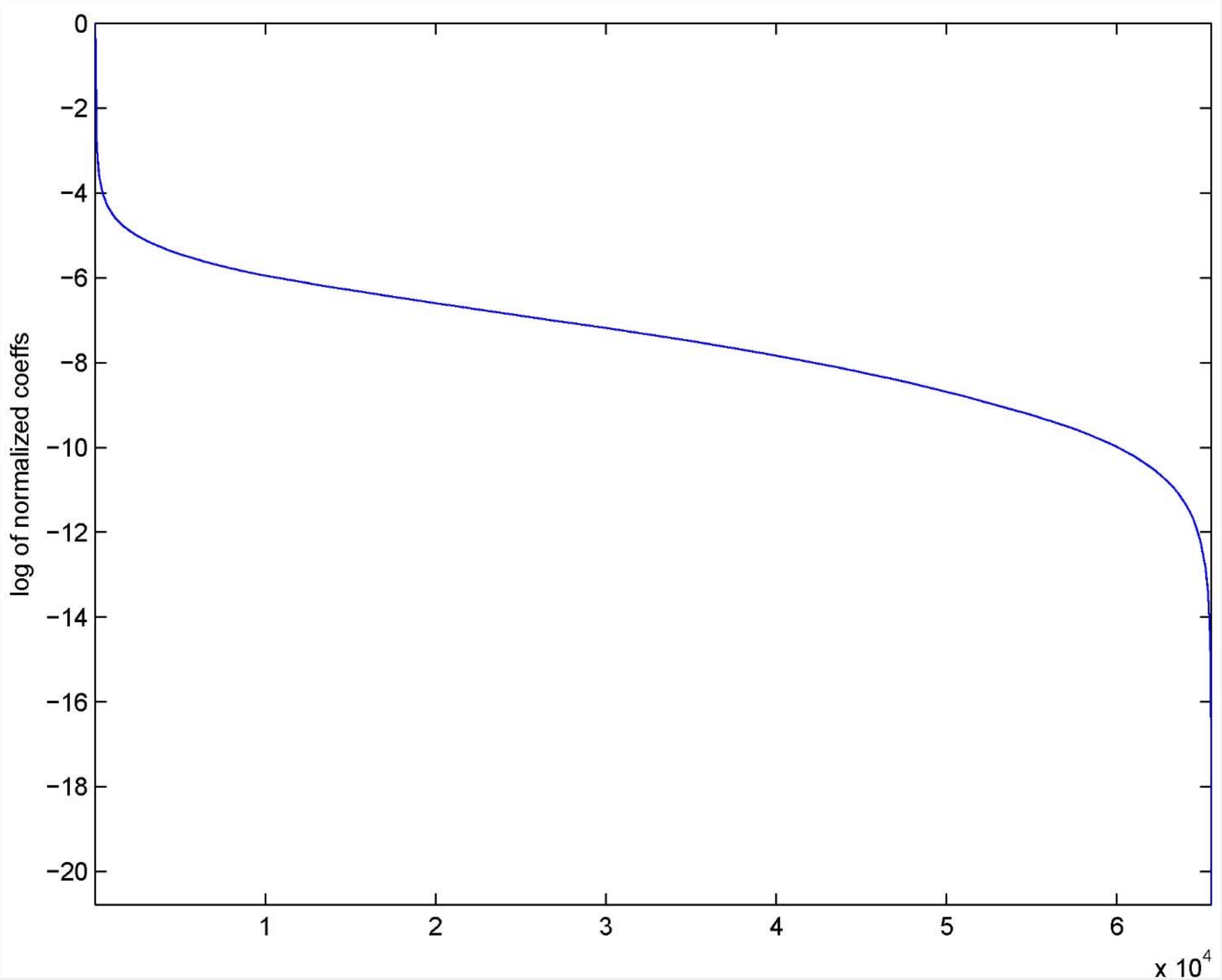
(a) 元の画像.



(b) Wavelet 変換の係数.

画像

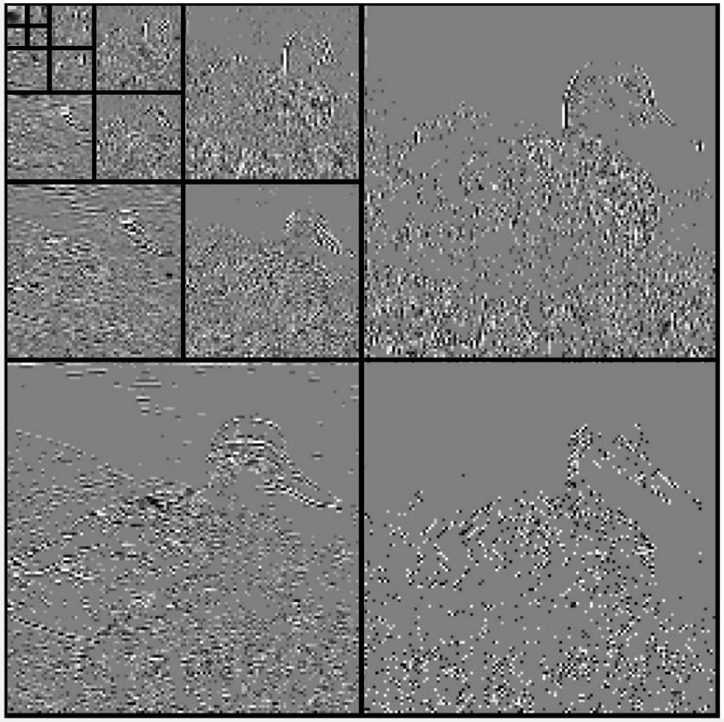
Wavelet 基底による画像変換



画像

小さい係数を省く (31.92% を残す)

(a) 再構成画像.

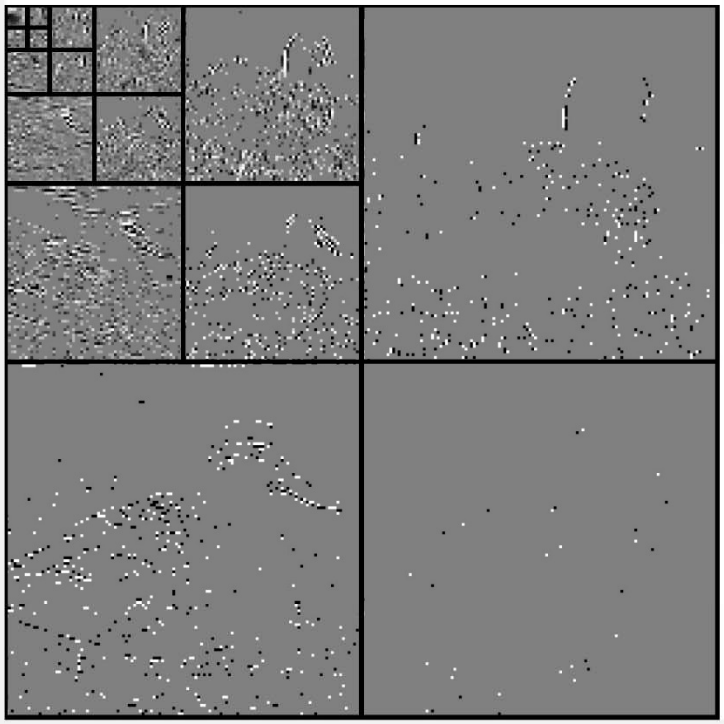


(b) Wavelet 変換の係数.

画像

小さい係数を省く (9.03% を残す)

(a) 再構成画像.

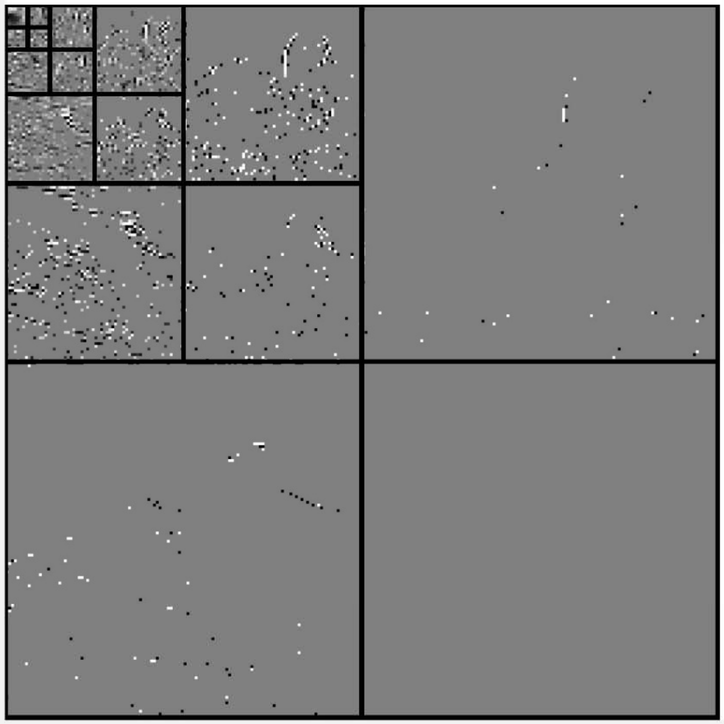


(b) Wavelet 変換の係数.

画像

小さい係数を省く (4.03% を残す)

(a) 再構成画像.



(b) Wavelet 変換の係数.

はじめに

理論的進展

応用

Event Horizon Telescope

発展

まとめ

@ Event Horizon Telescope

事象の地平線

⇓

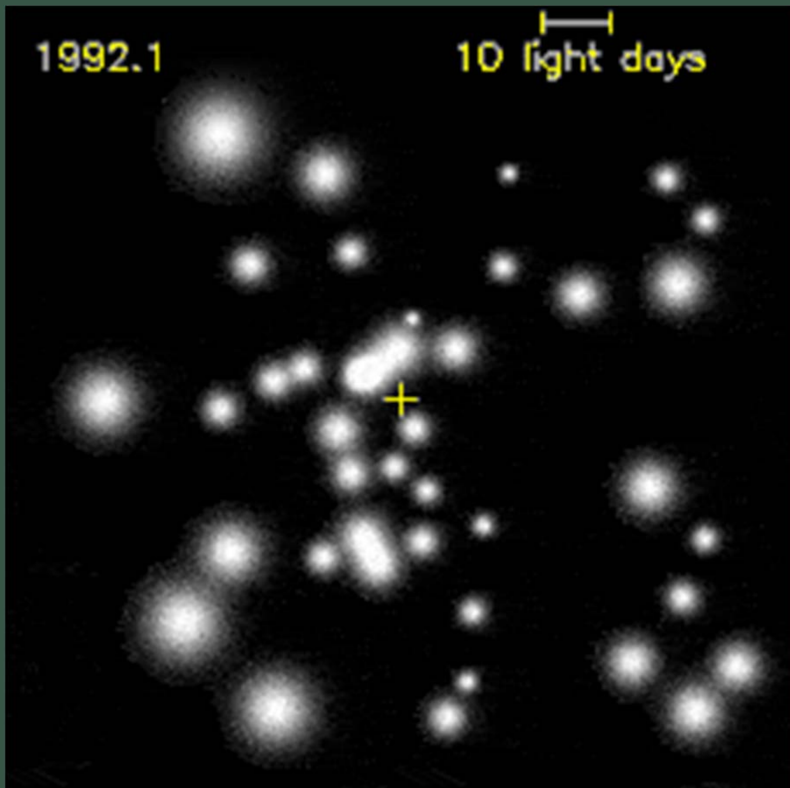
ブラックホール

ブラックホールを見る望遠鏡を作りたい.

NASA/JPL-Caltech

想像図.

◎ いて座A*



Credit: A. Eckart (U. Koeln) & R. Genzel (MPE-Garching), SHARP I, NTT, La Silla Obs., ESO
https://www.universetoday.com/133511/

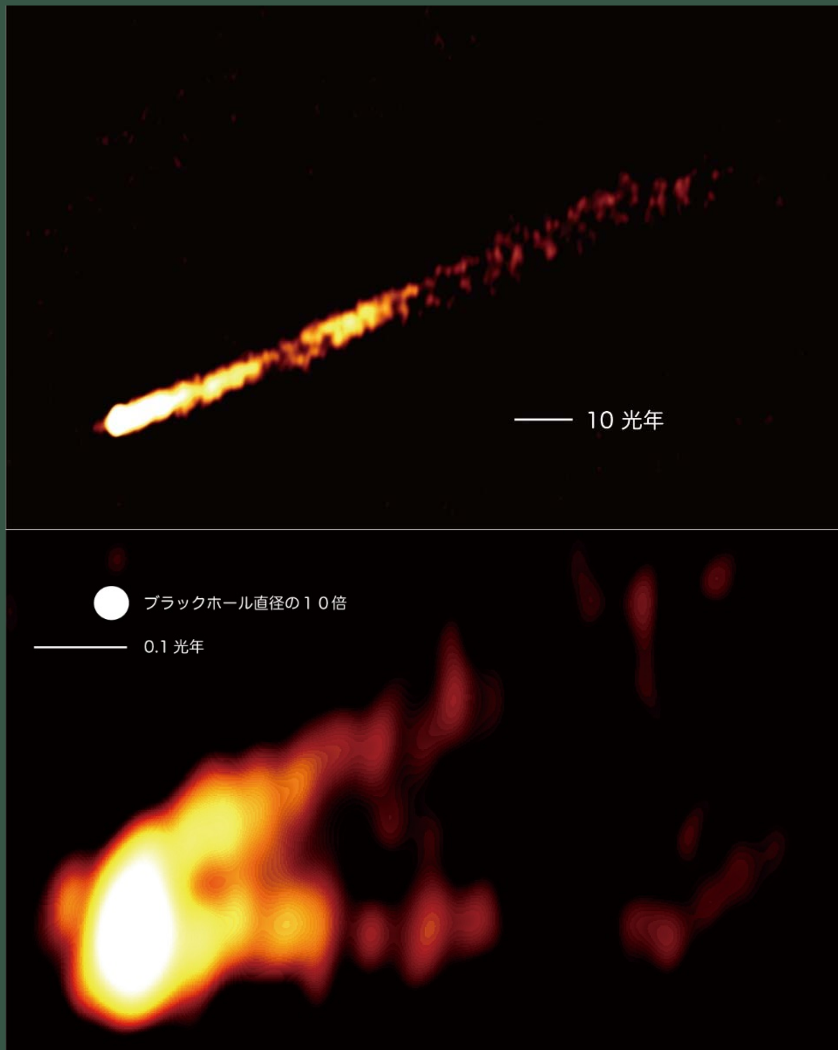
質量：太陽の400万倍.

距離：25,000光年

視半径：10μ秒角.

強力な電波光源.
この銀河の中心にあるブラックホール.
ジェットが観測されておらず.
ブラックホールシャドウ（黒い穴）が
見えると期待されている.

◎ M87



国立天文台
http://www2.nao.ac.jp/~m87blackhole/

質量：太陽の30~60億倍

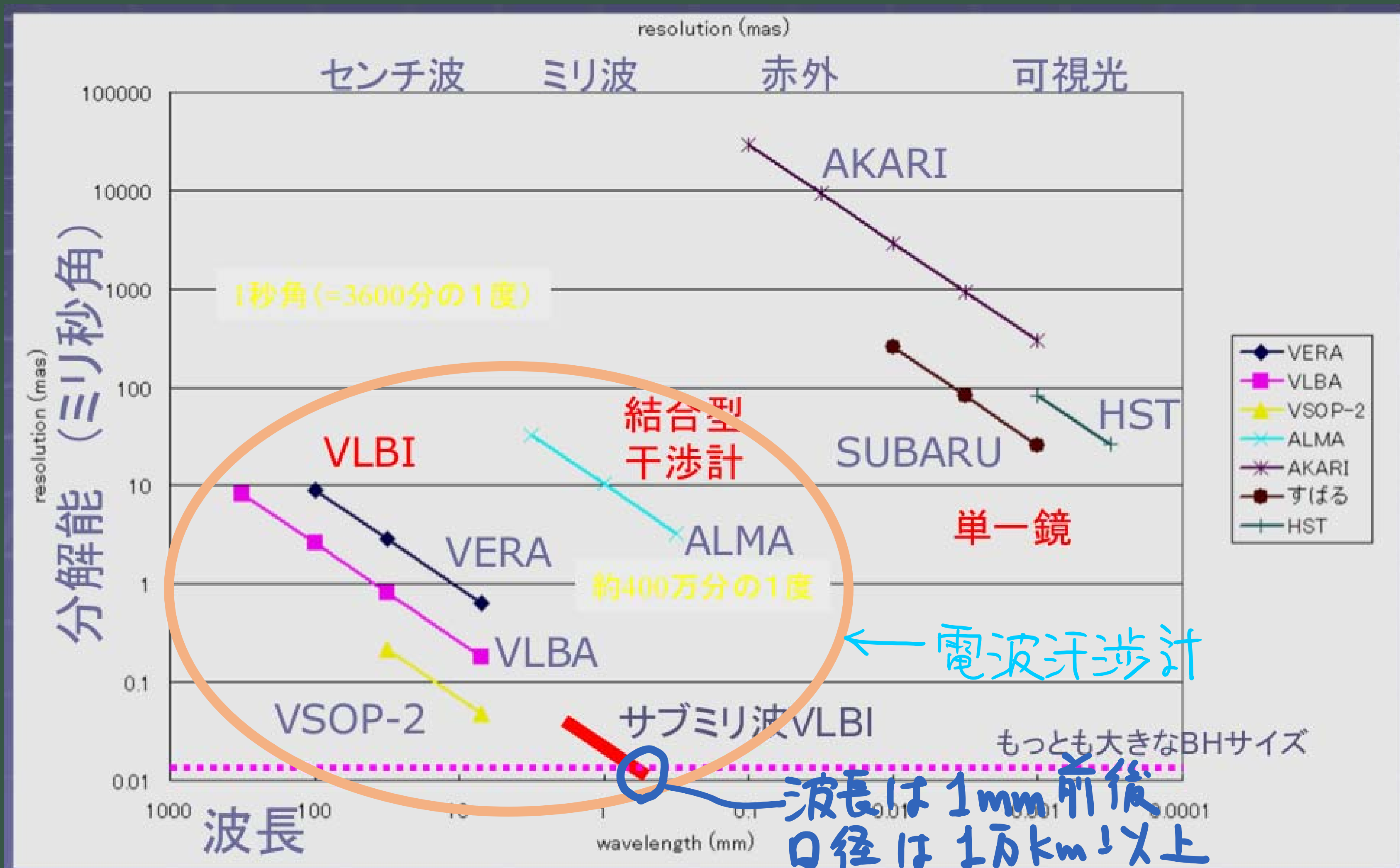
距離：5000万光年

視半径：4~8μ秒角.

強いジェットが観測されている.電波干渉計で撮影されている.
ジェットの根元の構造を見たい.

◎ 望遠鏡の角度分解能

$$\theta \simeq \frac{\lambda}{D} \quad \begin{array}{l}(\text{波長})\\(\text{口径})\end{array}$$



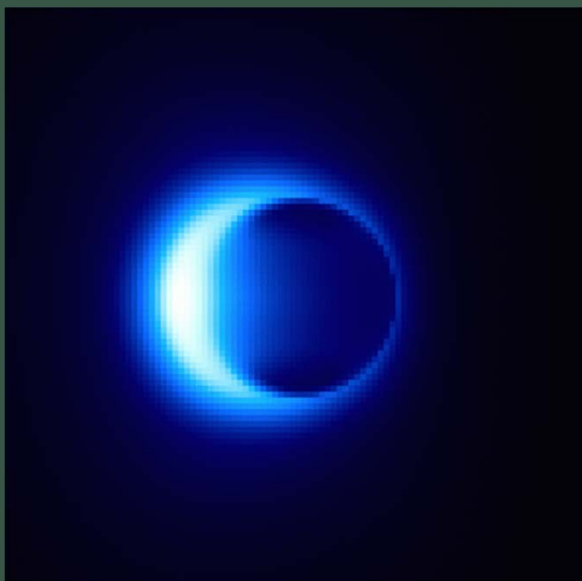
← 電波干渉計

波長は1mm前後

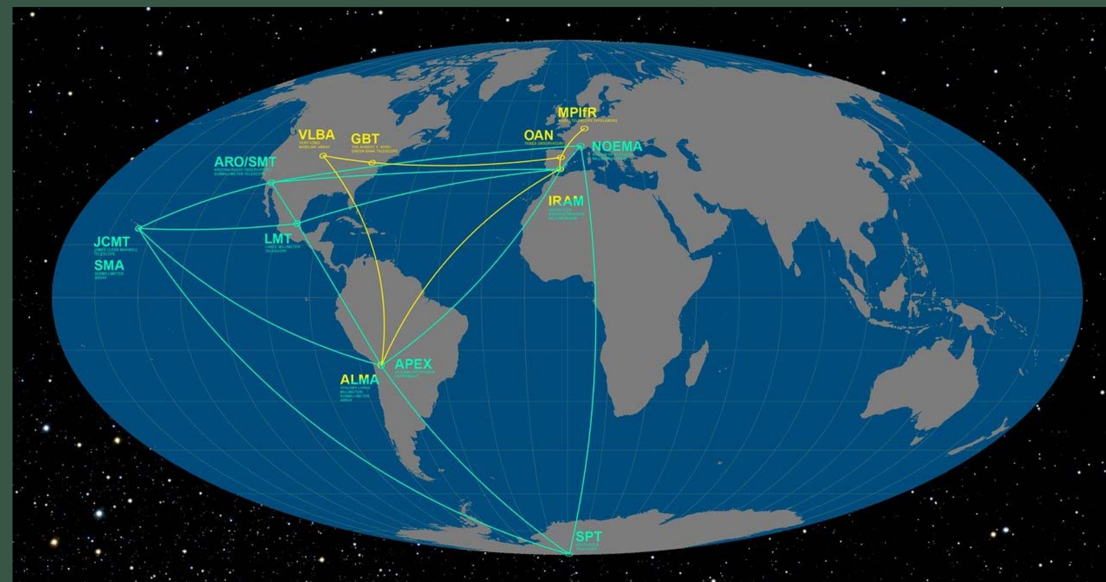
口径は1万km以上

◎ Event Horizon Telescope (EHT)

世界最大の望遠鏡 … 最も良い角度分解能をもつ.



courtesy D. Psaltis and A. Broderick



https://www.eso.org/public/images/ann17015a

2017年の観測のターゲット

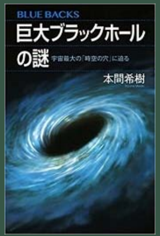
いて座A* と M87

@ EHT：国際協力プロジェクト.

EHT Collaboration Meeting 2016

Shep Doeleman
Harvard Univ

本間 希樹
国立天文台 水沢VLBI観測所 所長

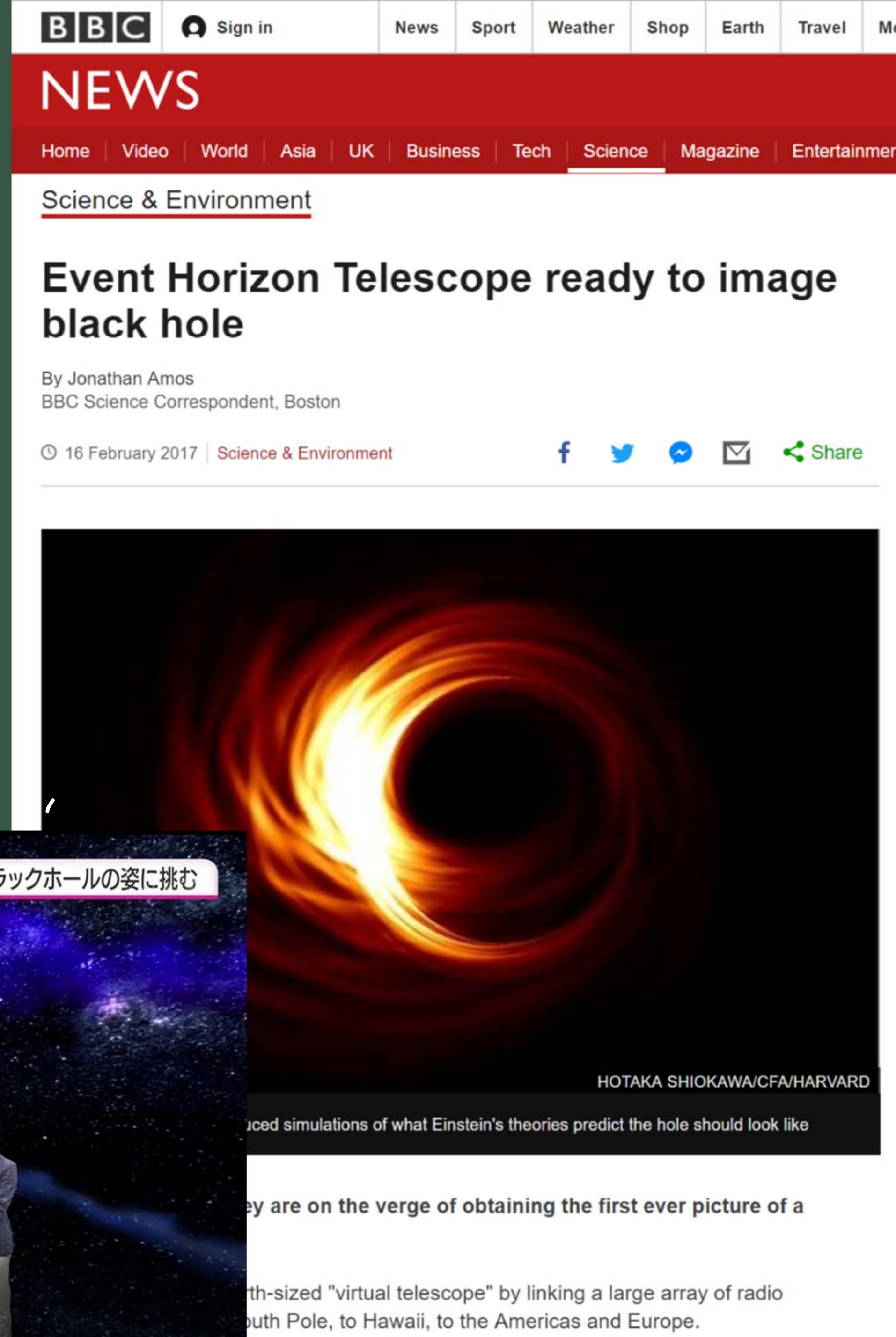


2017年 4月に
10日間の観測

5日間 …… いて座A*

5日間 …… M87

解析を行い、年内，年明けに結果を発表.



BBC Sign in News Sport Weather Shop Earth Travel Mor

NEWS

Home | Video | World | Asia | UK | Business | Tech | Science | Magazine | Entertainment

Science & Environment

Event Horizon Telescope ready to image black hole

By Jonathan Amos
BBC Science Correspondent, Boston

16 February 2017 | Science & Environment

Share

HOTAKA SHIOKAWA/CFA/HARVARD

…uced simulations of what Einstein's theories predict the hole should look like

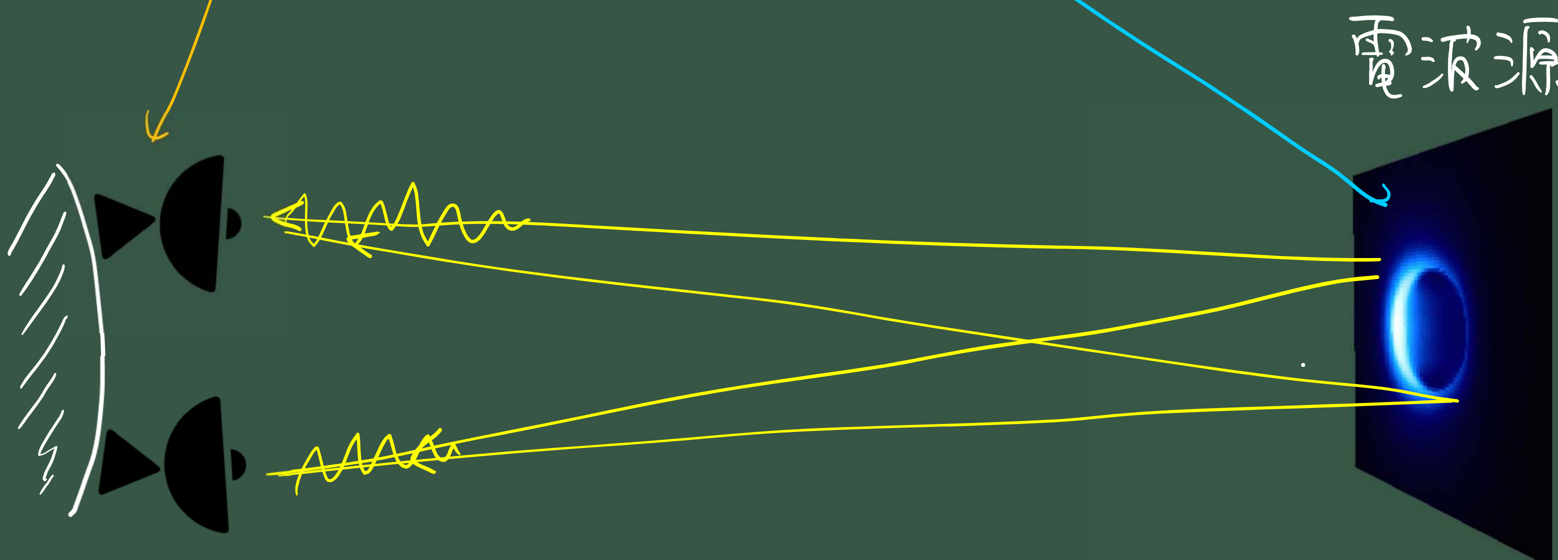
…ey are on the verge of obtaining the first ever picture of a

…th-sized "virtual telescope" by linking a large array of radio
…outh Pole, to Hawaii, to the Americas and Europe.

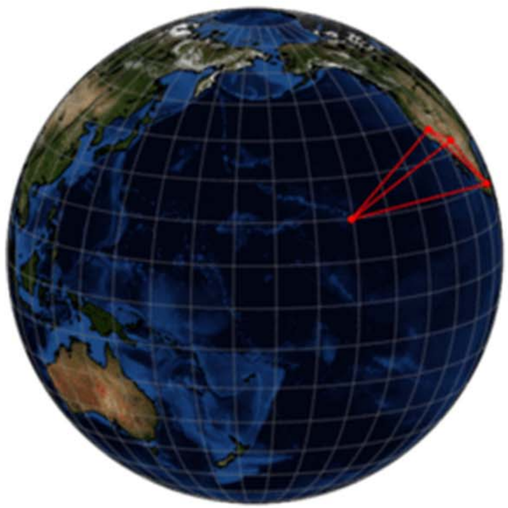
@電波干渉計の観測

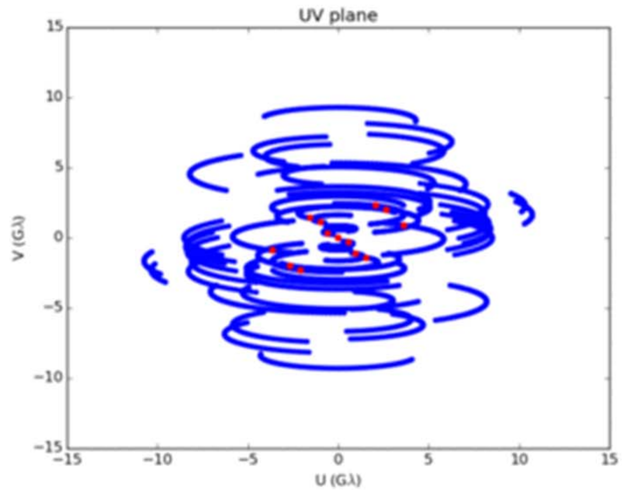
2次元フーリエ変換の関係

$$\boxed{\underbrace{V(u,v)}_{\text{観測量}} = \iint \underbrace{I(x,y)}_{\text{天球上の画像}} e^{-i(ux+vy)}\, dx\, dy}$$

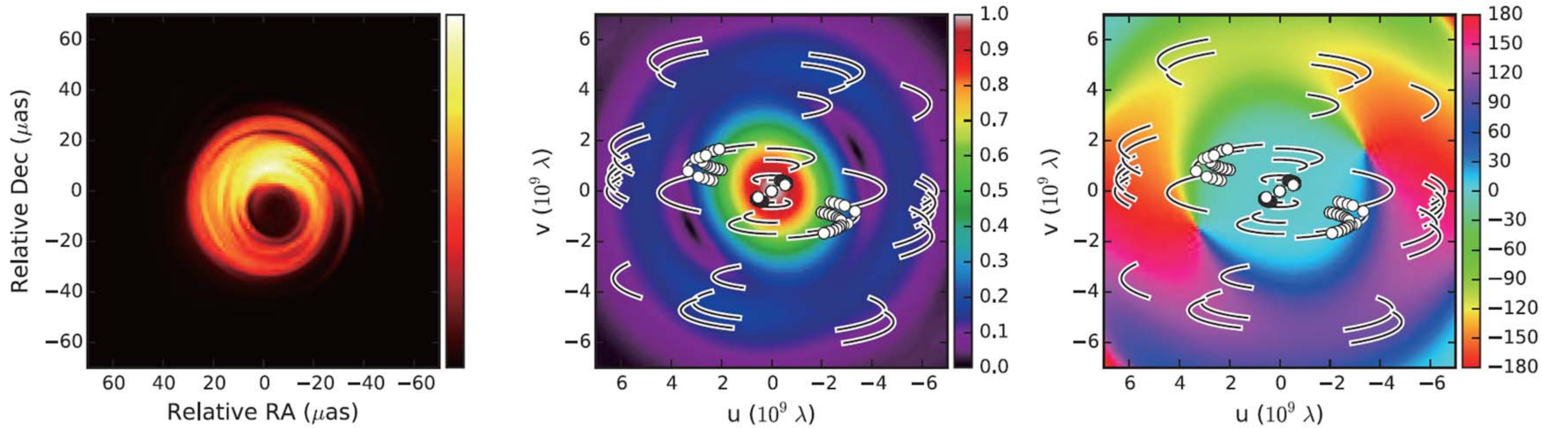


@ M87の観測に対する望遠鏡の配置と期待される観測





L. Vertatschitsch, https://www.cfa.harvard.edu/~lvertats/



Akiyama et al., ApJ 807 (2), 150

◎ 電波干渉計の観測

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & F & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$v = F x$$

フーリエ変換は線型変換

$M < N$ ⟶ 観測点の方が少ない. 逆問題

解は沢山存るがどれが良いか不定.

◎ 解を求める：スパースモデリング．

$$\min_{x} \frac{1}{2}\|v - Fx\|_2^2 + \underbrace{\lambda}_{\text{未定定数}} \overbrace{\|x\|_1}^{\sum_i |x_i|}$$

$$\text{subj. to} \quad x_i \geq 0, \ (i=1, \cdots, N)$$

◎ 0が多い（スパースな解）を求める方法．

◎ 1996年にTibshiraniが提案（LASSO）

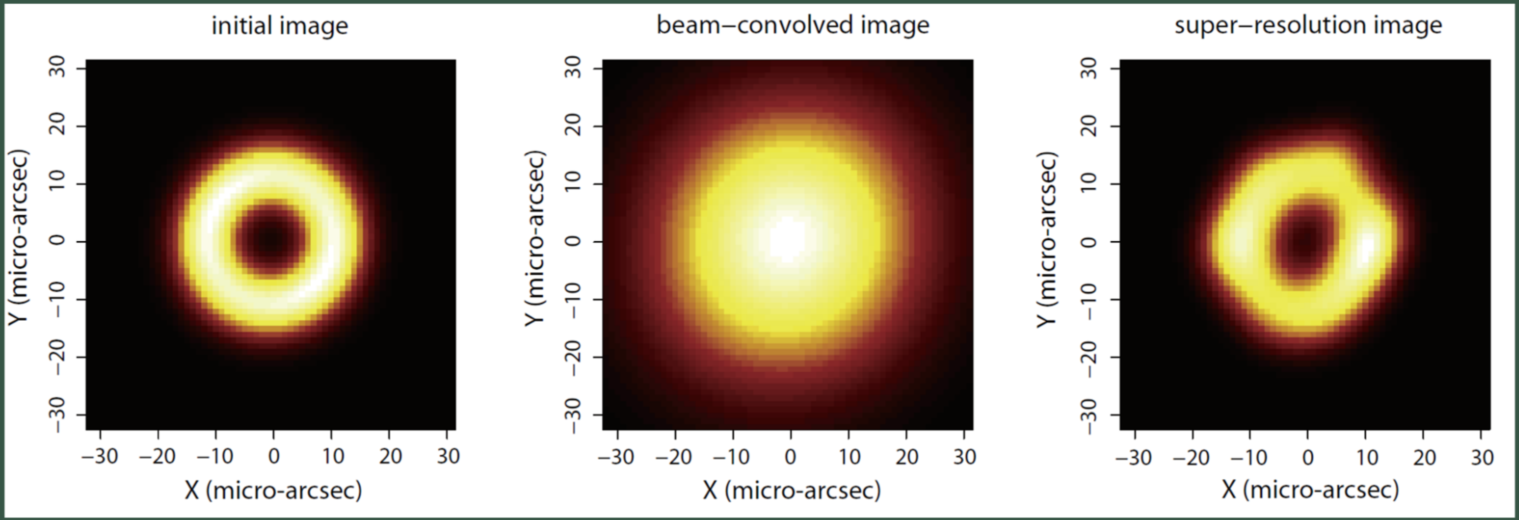
◎ λを大きくすると0が多く（スパースに）なる．

◎ データからλを決定するには交差検証法を用いる

◎ アルゴリズム，プログラム，実装を行う．

ブラックホールシャドウとスパースモデリング

モデル　　既存法　　スパースモデリング



Honma, Akiyama, Uemura, Ikeda. PASJ. 2014

- 求めたい画像がスパースならうまく行く.
- 画像の解像度をどのように設定するかに依存.